ارتعاشات آزاد سیستم جرم و فنر

هدف: بررسی ارتعاشات سیستم جرم و فنر با یک درجه آزادی و بدست آوردن پریود نوسان

مقدمه

درسیستم های دینامیکی که جسم قابلیت کسب یا از دست دادن انرژی را داراست، نوسان به وجود می آید که به آن ارتعاش می گویند. ارتعاش در ساده ترین شکل به صورت حرکت نوسانی تعریف می شود.

ارتعاشات را می توان به طرق مختلف دسته بندی کرد.

ارتعاش آزاد بدون اعمال نیروهای خارجی صورت می پذیرد. معمولاً ارتعاش آزاد هنگامی صورت می گیرد که یک سیستم کشسان جابجا شده یا سرعت اولیه ای به آن داده شود.

ارتعاش اجباری اغلب توسط نیروهای خارجی اعمال می شوند.

اگر در حرکت سیستم، انرژی تلف شود، ارتعاش به وجود آمده را ارتعاش آزاد نامیرا می نامند و اگر دارای میرایی باشند، انرژی سیستم به تدریج کم می شود که در این صورت نوسان را ارتعاش آزاد میرا گویند.

تئوری آزمایش

ساده ترین مدل یک سیستم مکانیکی ارتعاشی از یک جرم و یک فنر خطی بدون میرایی تشکیل شده است که فقط در راستای قائم دارای حرکت باشد. حرکت سیستم را می توان با یک مختصه $x(t)$ یعنی با یک درجه آزادی نشان داد. چنانچه فنر تحت نیروی F کشیده شده باشد فنر را کشسان نامند.

شیب منحنی نیرو برحسب جابه جایی برابر ثابت فنر k می باشد.

در این صورت نیروی فنر برابر خواهد بود با:

$$F = kx$$

اگر جرم m باعث شود طول آزاد فنر به اندازه‌ی δ_{st} جا به جا شود و سیستم را به وضعیت تعادل استاتیکی درآورد، در این صورت نیروی فنر برابر با وزن جرم m در وضعیت تعادل استاتیکی می‌شود:

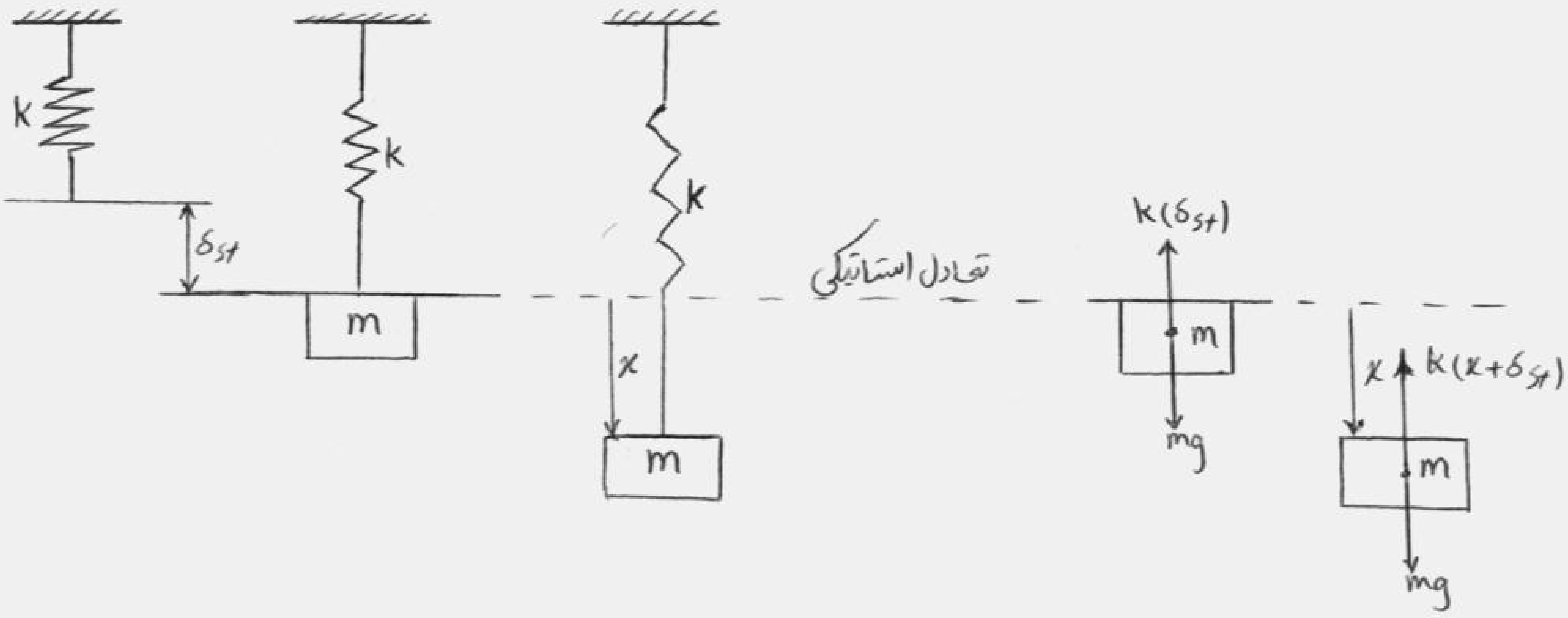
$$k\delta_{st} = mg \quad ①$$

حال اگر جرم از وضعیت تعادل استاتیکی به اندازه‌ی x جا به جا شود، با استفاده از قانون دوم نیوتن $\sum F = m\ddot{x}$ بر حسب تنها مختصه x می‌توان نوشت:

$$-k(x+\delta_{st}) + mg = m\ddot{x} \quad ②$$

با در نظر گرفتن رابطه ①، رابطه‌ی ② به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-kx = m\ddot{x}$$



واضح است که انتخاب وضعیت تعادل استاتیکی به عنوان مرجع x کمیت mg نیروی ناشی از ثقل و نیروی استاتیکی $k\delta_{st}$ فنر را از معادله‌ی حرکت حذف کرده است و نیروی برآیند موثر جرم m فقط نیروی فنر است که ناشی از تغییر مکان x از وضعیت تعادل استاتیکی می‌باشد.

بنابراین معادله‌ی حرکت سیستم تک درجه آزادی بدون میرا کننده به صورت زیر در می‌آید.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad ③$$

که در آن x جا به جایی از وضعیت تعادل استاتیکی، m جرم، k سفتی فنر و $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ شتاب جرم می‌باشد.

اگر رابطه‌ی ۳ را بر m تقسیم کرده و به جای $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (4)$$

که در آن ω_n ثابت و مثبت است. $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

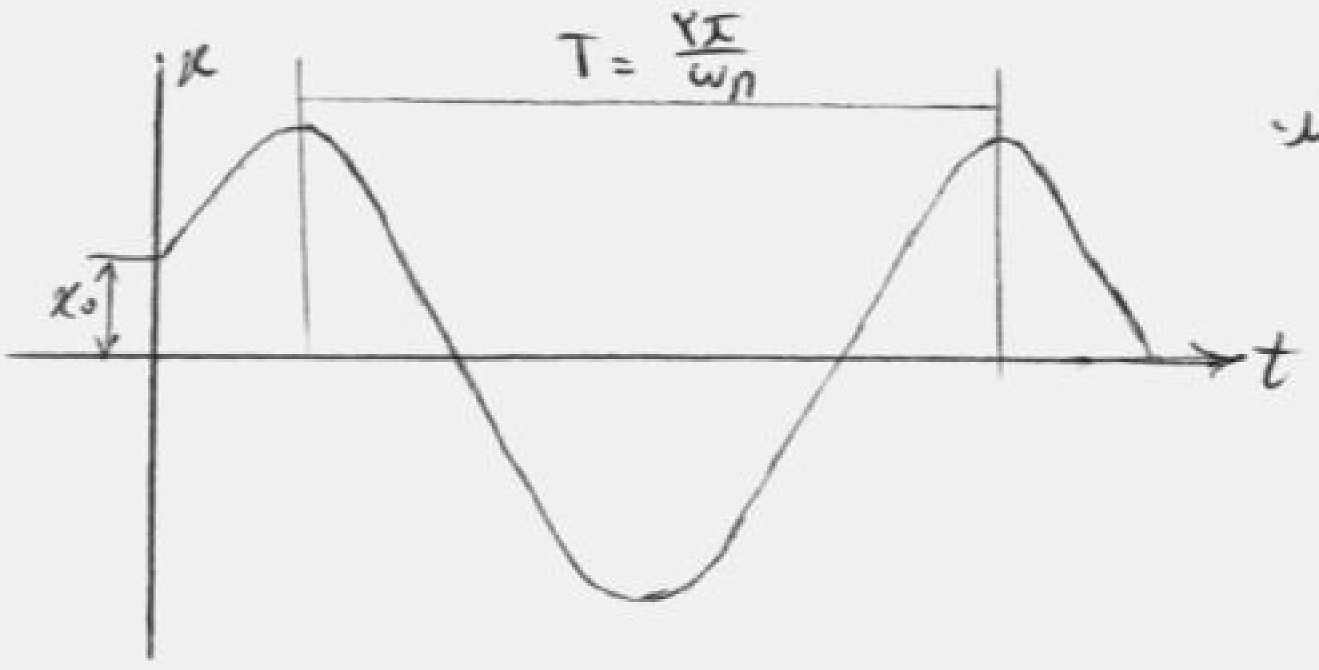
برای حل معادله‌ی دیفرانسیل ۴ می توان پاسخ را به صورت هارمونیک در نظر گرفته و نوشت:

$$x = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \qquad (5)$$

که در آن A_1 و A_2 مقادیر ثابت هستند که از شرایط اولیه‌ی $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ بدست می آیند. رابطه‌ی ۵ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x = A \sin (\omega_n t + \phi)$$

در بالا $A_1 = x_0$ و $A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ و $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ دامنه و $\phi = tg^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ زاویه‌ی فاز حرکت می باشند.



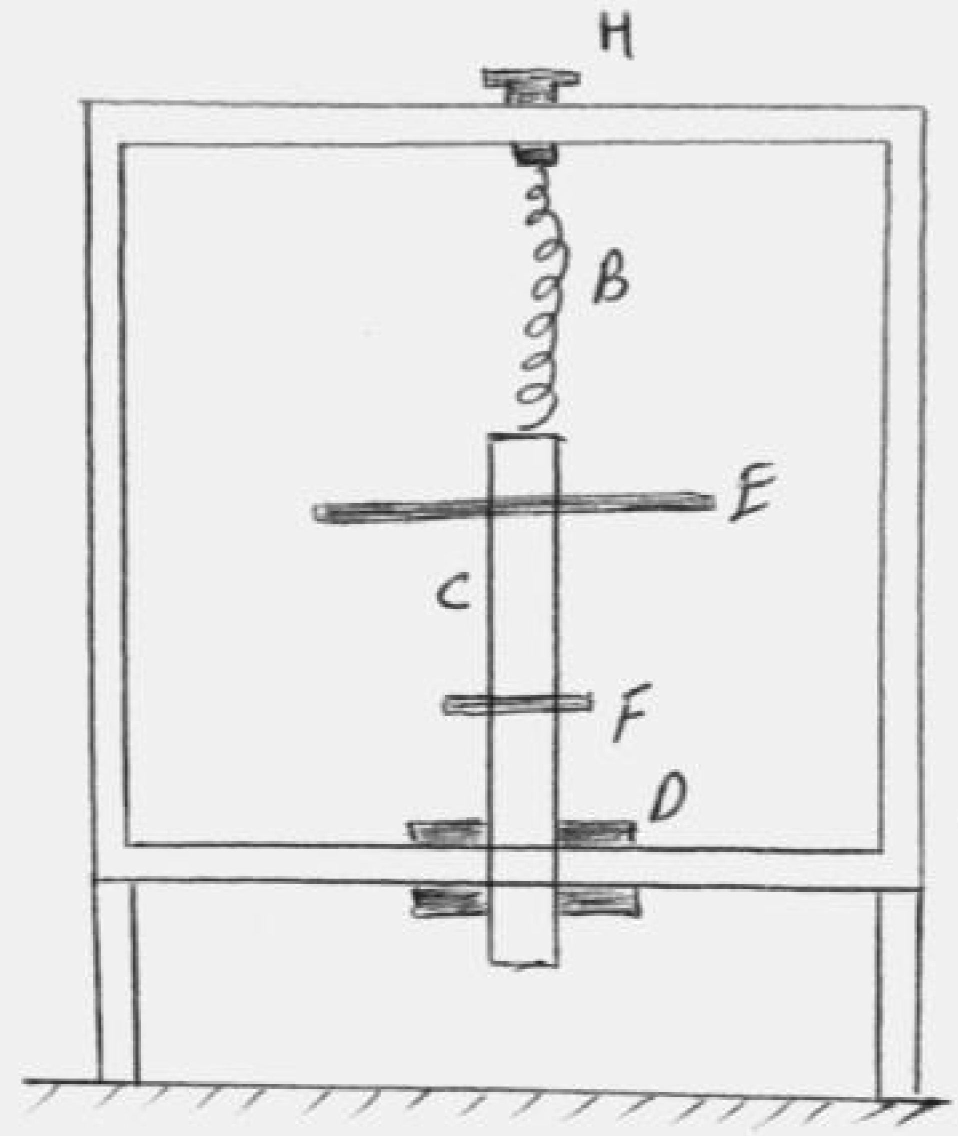
فرکانس طبیعی سیستم ω_n برحسب $\frac{rad}{s}$ می باشد.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

شرح دستگاه

دستگاه از یک فنر مارپیچ B تشکیل شده است که از بالا توسط دستگیره H به قاب A وصل شده است و در پایین به میله‌ی C وصل می شود. حرکت میله‌ی C بعلت وجود راهنمای D فقط دارای یک درجه آزادی است. برروی میله‌ی C دو صفحه مسدود E و F تعبیه شده که از صفحه‌ی F برای افزودن وزنه به دستگاه و از صفحه‌ی E برای اندازه گیری افزایش طول استفاده می شود.



روش انجام آزمایش

پس از تراز نمودن سیستم یکی از فنرها را به قاب متصل کرده و میله C را به آن می آویزیم و با افزودن وزنه های مختلف به فنر تغییر طول آن را اندازه گرفته و ثبت می کنیم. مقدار این وزنه از ۴۰۰gr شروع و با افزایش هر باره ۴۰۰gr تا ۳۲۰۰gr ادامه می دهیم.

طی این مدت در هر بار مقدار δ ثبت می شود. با اندازه گیری زمان مثلاً ۲۰ رفت و برگشت می توان پریود تجربی نوسانات را بدست آوریم. اگر زمان بیست نوسان برابر t باشد زمان یا پریود تجربی نوسان برابر $\frac{t}{20}$ خواهد بود. پس از محاسبه ی پریود یک نوسان از راه تجربی می توانیم همین پریود را از نظر تئوری نیز بدست آوریم. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$

جدول مربوط به محاسبات پریود تجربی و پریود تئوری در صفحه ی بعد آمده است.

$k = 1\frac{N}{mm} = 1000\frac{N}{m}$ فرض شده است.

جرم وزنه m (Kg)	تغییر طول δ (mm)	زمان ۲۰ نوسان (s)	T تئوری	$k = \frac{mg}{\delta}$ (N/m)	تجربی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	درصد خطا
۰/۴	۲۵۴	۵/۹۷	۰/۲۹۸	۹۸۱	۰/۱۲۶	۵۷٪
۰/۸	۲۵۷	۵/۷۸	۰/۲۸۹	۱۱۲۱	۰/۱۶۸	۴۱٪
۱/۲	۲۶۲	۶/۶۶	۰/۳۳۳	۹۸۱	۰/۲۱۹	۳۴٪
۱/۶	۲۶۶	۶/۸۷	۰/۳۴	۹۸۱	۰/۲۵۳	۲۵٪
۲	۲۷۰	۷/۶۳	۰/۳۸۱	۹۸۱	۰/۲۸۳	۲۵٪
۲/۴	۲۷۵	۸/۰۲	۰/۴۰۱	۹۴۱	۰/۳۱۷	۲۰٪
۲/۸	۲۸۰	۸/۴۰	۰/۴۲	۹۱۵/۶	۰/۳۴۷	۱۷٪
۳/۲	۲۸۴	۸/۶۰	۰/۴۳	۹۲۳	۰/۳۷۰	۱۴٪

در جدول بالا فاصله‌ی اولیه ۲۵۰mm می باشد و از این طول به بعد می باشد که جزو تغییرات δ می باشد.

$$\text{درصد خطا} = \left| \frac{\text{عملی} - \text{تئوری}}{\text{تئوری}} \right| \times ۱۰۰$$

$$= \left| \frac{۰/۲۹۸ - ۰/۱۲۶}{۰/۲۹۸} \right| \times ۱۰۰ = ۵۷٪$$

کاربرد

در زیر گستره‌های معمولی ارتعاشات آزاده که در کاربردهای مختلف علمی و صنعتی با آنها مواجه می‌شویم را ذکر می‌کنیم.

۱- ارتعاشات اتمی با فرکانس 10^{12} هرتز و دامنه $10^{-8}-10^{-6}$ میلیمتر

۲- ریزلرزه‌های پوسته زمین با فرکانس ۱-۰/۱ هرتز و دامنه $10^{-5}-10^{-3}$ میلیمتر

۳- ارتعاشات ماشین آلات و ساختمان‌ها با فرکانس ۱۰-۱۰۰ هرتز و دامنه ۰/۱-۱ میلیمتر

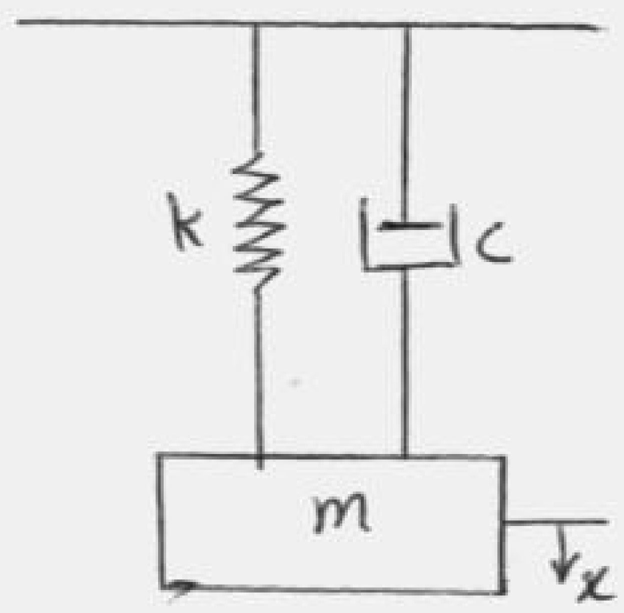
۴- نوسانات جانبی ساختمان‌های بلند با فرکانس ۰/۱-۵ هرتز و دامنه ۱۰-۱۰۰۰ میلیمتر

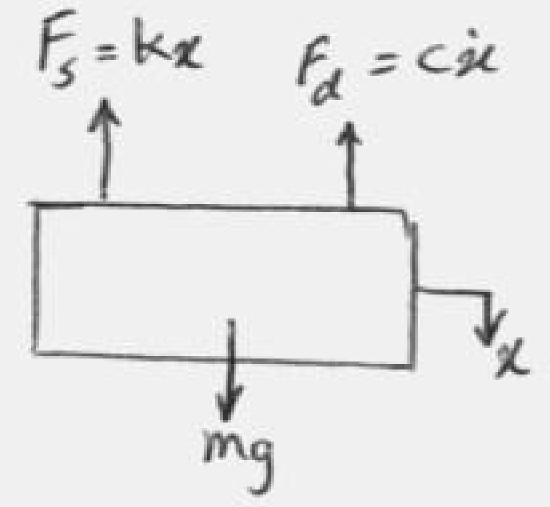
۵- کاهش ارتعاشات صندلی هلیکوپتر

صندلی یک بالگرد همراه با خلبان به وزن $1000\ N$ و دارای تغییر مکان استاتیکی $D_{st}=10mm$ است. ارتعاشات هارمونیکی سطح بالگرد، با دامنه $0.2mm$ و با فرکانس $4HZ$، به پایه صندلی منتقل می‌شود. ابتدا باید دانست خلبان چه میزان ارتعاشات را تحمل می‌کند سپس برای کاهش ارتعاشات، طرح صندلی را طراحی کرد که برای این کار صندلی را به صورت یک سیستم نامیرا با یک درجه آزادی درنظر می‌گیرند و معادلات آن را حل می‌کنند.

حل مسائل

رابطه‌ی پریود نوسان برای یک سیستم جرم و فنر همراه با یک مستهلک کننده ویسکوز (دمپر)





$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

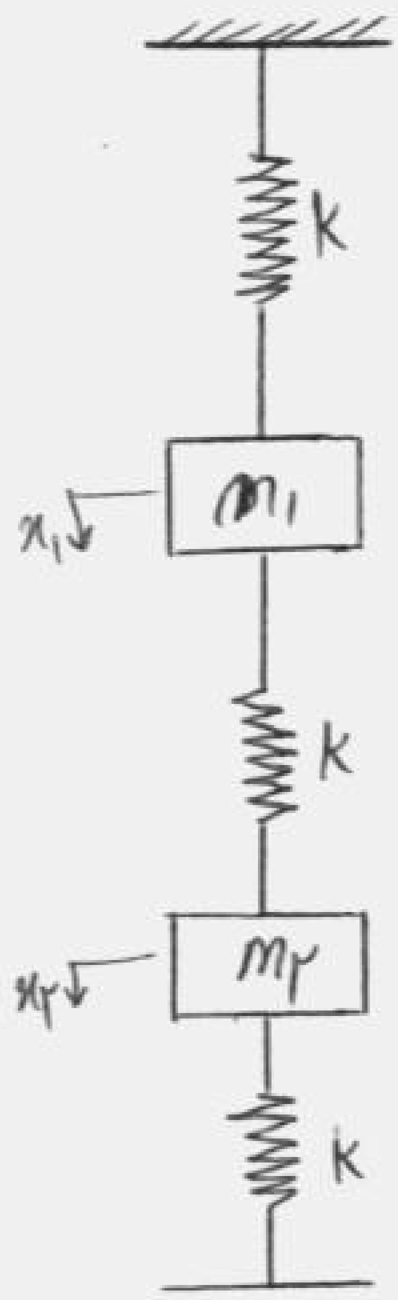
$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

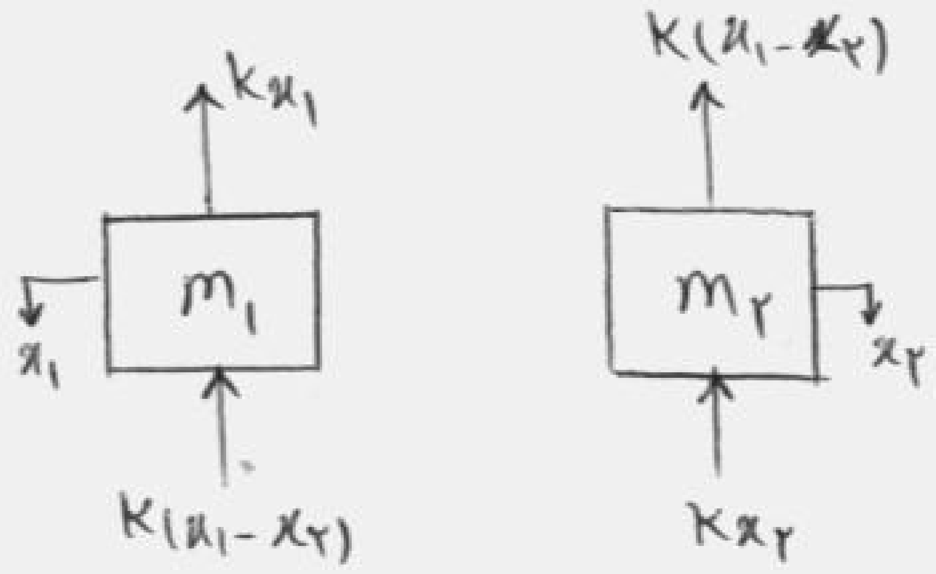
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$Dx^2 + \frac{c}{m}Dx + \frac{k}{m}x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ D^2 + \frac{k}{m} + \frac{c}{m}D = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} D_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ D_2 = \frac{-c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(c_1 e_1^{-\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}} + c_2 e^{\sqrt{\frac{c^2}{4m} - \frac{k}{m}}}\right)$$

پریود نوسان را برای یک سیستم جرم و فنر با دو درجه آزادی بدست آورید.





$$\begin{cases} -kx_1 + k(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2 + k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \sin \omega t \end{cases}$$

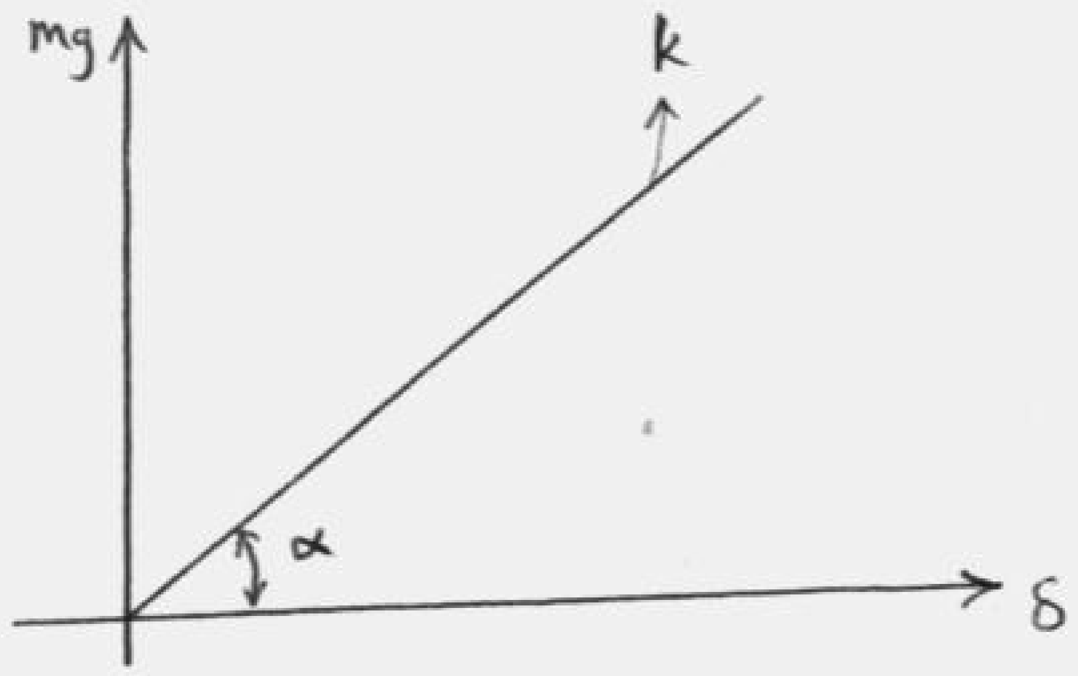
$$\implies \begin{cases} X_1(k + k - m_1\omega^2) - kx_2 = 0 \\ X_2(k + k - m_2\omega^2) - kx_1 = 0 \end{cases}$$

با فرض $m_1 = m_2$ داریم:

$$(\omega^2)^2 - \left[\frac{2k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}\right]\omega^2 + \left(\frac{3k}{m_1 m_2}\right) = 0$$

$$(\omega^2)^2 - \frac{4k}{m}\omega^2 + \frac{3k^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{m^2} - \frac{3k^2}{m^2}} \Longrightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$



$$k = tg\,\alpha$$

با توجه به نقاط داشته شده نمودار مربوطه را در کاغذ میلی‌متری رسم و k برابر زیر می‌گردد.

$$k = ۹۵۴٫۹۲ \ \frac{N}{m}$$

علل وجود خطا

۱- وزن خود فنر

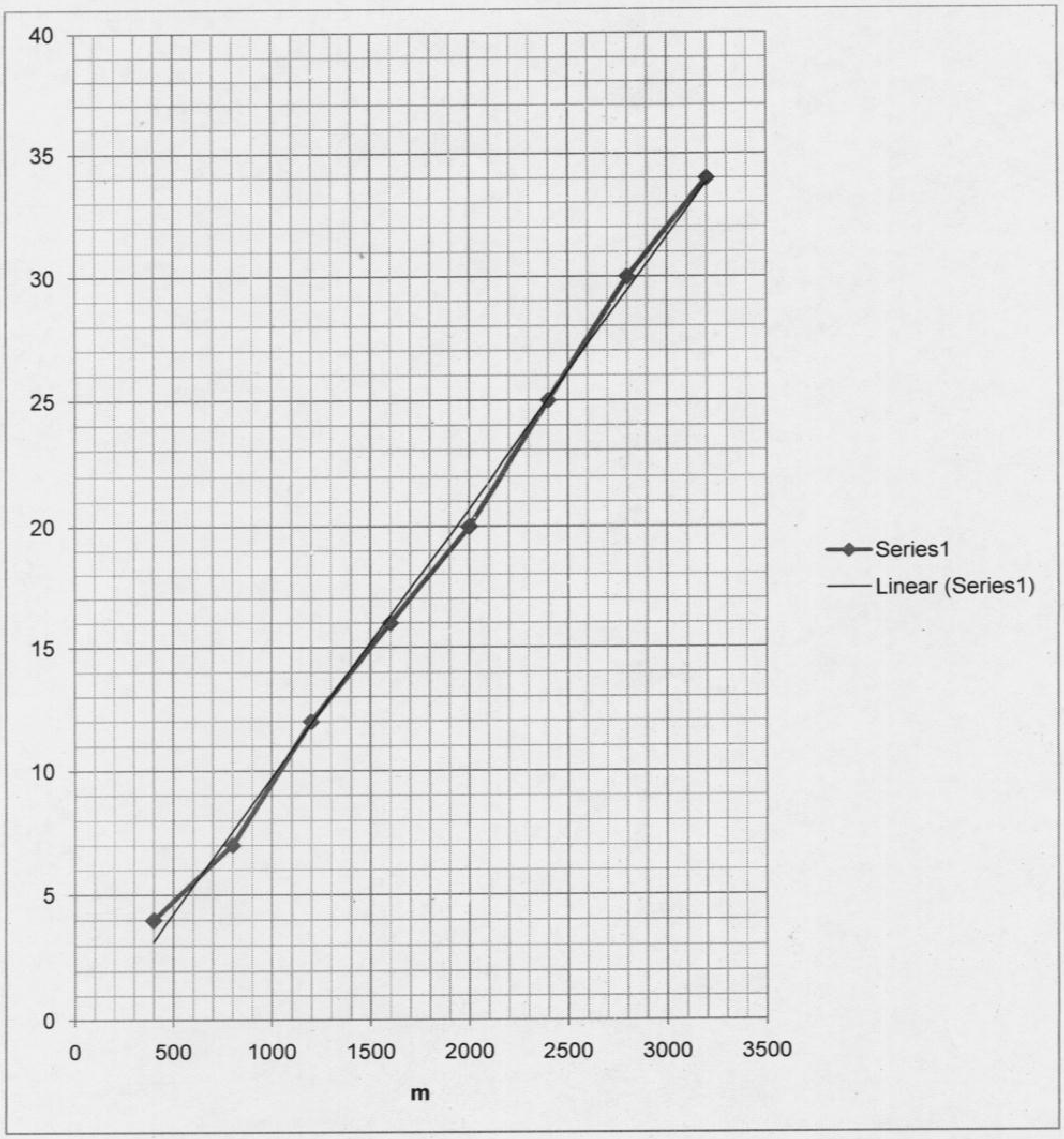
۲- صفحات هدایتی

۳- عدم اندازه‌گیری دقیق زمان ۲۰ نوسان توسط کرنومتر

۴- وجود مقاومت هوا

۵- وجود لقی در تکیه‌گاه D و میله C جرم از راستای افقی نیز کمی نوسان می‌کند.

۶- وجود اصطکاک بین میله و تکیه‌گاه


40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
m
Series1
Linear (Series1)